Pràctica 1 de Control Automàtic I

Transformada de Laplace

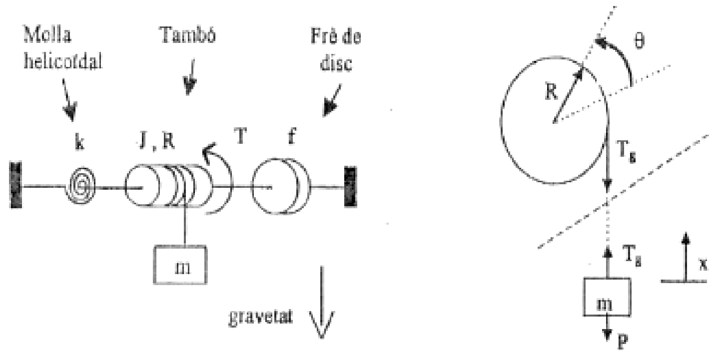
Francisco José Aguilar Celdrán

Sergio Blanco Cuaresma

Especificacions

Introducció

El sistema a modelitzar consisteix en un eix rotatori que consta d'una molla circular (constant = k), un fre de disc (constant = f), i un tambor de radi R amb moment d'inèrcia J, al qual hi ha enrotllada una corda amb una massa al final. Així, mentre la massa tendeix a fer girar el tambor i caure per acció de la gravetat, la molla i el fre s'oposen a que passi.



- Forces que intervenen a la Rotació de l'eix ... i a la Translació de la massa -

Si observem el sistema podem veure que amb T = 0 la massa té una posició d'equilibri estable a $x = x_o$, és a dir hem de considerar que el sistema té unes condicions inicials no nul·les i haurem de fer que $x(0) = x_o \neq 0$. Per tant, caldrà calcular x_o.

La finalitat de l'exercici és suposar que al sistema se li aplica un parell T al tambor (fent força es fa girar el tambor) i interessa conéixer com es desplaça verticalment la massa. Per tant, caldrà trobar la relació entre X(s) i T(s).

Estudi previ

1. *Obtenció de l'equació diferencial que relaciona x(t) ↔ T(t) :*
   a) Rotació: $T - k(x - x_o) / R - fx' / R - T_g R = (J / R)x''$, on $\theta = x / R$
   b) Translació: $T_g - mg = mx''$, on és la tensió de la corda.

   Si substituïm Tg de b) a a) i ho arreglem en queda el següent:

   $$\mathbf{T = Jx'' / R + k(x - x_o) / R + fx' / R + mR(x'' + g)} \qquad \mathbf{(1)}$$

1. *Càlcul de x_o :*

   En equilibri (i amb T = 0) el pes de la massa fa un parell T_g sobre el tambor que s'equilibra amb el parell de la molla. Aixa queda:

   $$\mathbf{mgR = kx_o / R} \qquad \mathbf{(2)}$$

Realització pràctica

1. Troba la funció X(s) en funció de T(s). Troba també l'expressió H(s) = X(s) / T(s). Nota: amb l'expressió (2) pots eliminar xo a l'expressió (1) i trobar la funció de transferència.

2. Per estudiar el comportament del sistema (el moviment de la massa en funció del parell T) variarem els paràmetres del sistema. De moment suposarem que són:

   K = 100 ; J = 15 ; R = 0.5 ; f = 50 ; m = 10 ; g = 9.8 (tot en S.I.)

2.1. Fes que T(t) sigui un esglaó i comprova que les definicions dels sentits de les forces, parells de forces i x(t) estan d'acord amb el que surt a la simulació, és a dir, si el parell T és positiu cal obtenir que x(t) varia de la forma que la massa **m** puja i que si el parell és negatiu baixa.

2.2. Les variacions de k i de m permeten provocar oscil·lacions més o menys àmplies? Què passa si k = 0?

2.3. Investiga el paper que juga el factor f provocant diferents valors (provoca també f = 0).

2.4. Fes que T(t) sigui un impuls i explica què passa.

Comandes de Matlab

- Per definir un polinomi a Matlab es posen els coeficients en un array en ordre decreixent. Exemple : Si $N(s) = 2s^3 + 4.5s^2 + \pi s + 0.01$, aleshores el polinomi a Matlab es defineix com una variable array així : **u = [2 4.5 pi .01]**

- Per obtenir la desposta d'un sistema a una entrada esglaó unitari hi ha una comanda específica. Suposem que del sistema tenim l'expressió H(s) = Sortida(s) / Entrada(s) = N(s) / D(s). La comanda és la següent: **step(n,d);** El resultat d'executar aquesta comanda és un gràfic on es veu Sortida(t).

- Per obtenir la desposta d'un sistema a una entrada impuls unitari, la comanda específica és: **impulse(n,d);**

- Truc: per obtenir respostes a senyals d'entrada al sistema no unitaris (per exemple de valor K), només cal canviar el polinomi numerador n per K*n.

Realització

1. *Troba la funció X(s) en funció de T(s). Troba també l'expressió H(s) = X(s) / T(s).*

Partim de l'equació diferencial: $T = Jx'' / R + k(x - x_o) / R + fx' / R + mR(x'' + g)$

Sabent que: $mgR = kx_o / R$

Tenim per tant: $x_o = mgR^2 / K$

Volem arribar a obtenir la funció T(s), expressada de la següent manera:

$$T(s) = X(s)\,[As^2 + Bs + C] + x_o\,[\ ?\ ]$$

Amb la Transformada de Laplace resoldrem l'equació diferencial lineal plantejada.

Les condicions inicials de l'equació diferencial són:

1) $x\,(t = 0) = x\,(0-) = x_o$
2) $dx / dt\,|_{t = 0-} = 0$ (Suposant-ho => El fet de tenir condicions inicials nul·les no afectarà a les oscil·lacions, ja que no és rellevant en quin punt s'inicien, per tant simplificarem aquest càlcul)

Desenvolupem els termes de T per obtenir x(t) → X(s) (Aplicant T.L. a cada banda) :

$L\,[Jx'' / R]$

$= (J / R)\,L\,[x''] = (J / R)\,L\,[d^2x(t) / dt^2] = (J / R)\,[s^2X(s) - sx(0-) - dx / dt\,|_{t=0-}] =$

$(J / R)\,[s^2X(s) - s(mgR^2 / K) - dx / dt\,|_{t=0-}] = (J / R)\,[s^2X(s) - smgR^2 / K]$

$L\,[k(x - x_o) / K]$

$= (K / R)\,L\,[x - x_o] = (K / R)\,L\,[x] + (K / R)\,L\,[x_o] = (K / R)\,X(s) + (K / R)\,x_o =$

$(K / R)\,X(s) + (K / R)\,(mgR^2 / K) = (K / R)\,X(s) + mgR$

$L\,[fx' / R]$

$= (f / R)\,L\,[x'] = (f / R)\,[sX(s) - x(0-)] = (f / R)\,[sX(s) - mgR^2 / K]$

$L\,[mR(x'' + g)]$

$= mR\,L\,[x'' + g] = mR\,L\,[x''] + mR\,L\,[g] = mR\,[s^2X(s) - s(mgR^2 / K)] + mRg$

Per tant T(s) ens queda:

$$T(s) = (J / R)\,[s^2X(s) - smgR^2 / K] + (K / R)\,X(s) + mgR + (f / R)\,[sX(s) - mgR^2 / K] + mR\,[s^2X(s) - s(mgR^2 / K)] + mRg$$

Agrupem T(s):

Per una banda hi ha:

$$X(s)\ [((J / R) + mR)s^2 + (f / R)s + (K / R)]$$

A més, tenim: (tenint en compte que $x_o = mgR^2 / K \Rightarrow mgR = kx_o / R$)

$$x_o\ [-s(J / R) -1 -mRs] + mgR + mgR = x_o\ [-s((J / R) - mR) -1] + 2Kx_o / R =$$

$$x_o\ [-s((J / R) - mR) + (2K / R) - 1]$$

Aleshores, T(s) resulta:

$$T(s) = X(s)\ [((J / R) + mR)s^2 + (f / R)s + (K / R)] + x_o\ [-s((J / R) - mR) + (2K / R) - 1]$$

Donarem el valor 0 a x_o i per tant hi haurà condicions inicials nul·les, quedant T(s) de la següent manera:

$$\mathbf{T(s) = X(s)\ [\underbrace{((J / R) + mR)}_{(A)}s^2 + \underbrace{(f / R)}_{(B)}s + \underbrace{(K / R)}_{(C)}]}$$

El següent pas és calcular la relació H(s) = X(s) / T(s)

$$H(s) = X(s) / T(s) = 1 / (As^2 + Bs + C) = N(s) / D(s)$$

$$H(s) = X(s) / X(s)\ [\ ((J / R) + mR)s^2 + (f / R)s + (K / R)]$$

$$\mathbf{H(s) = 1 / [((J / R) + mR)s^2 + (f / R)s + (K / R)]}$$

2. *Per estudiar el comportament del sistema (el moviment de la massa en funció del parell T) variarem els paràmetres del sistema. De moment suposarem que són: K = 100 ; J = 15 ; R = 0.5 ; f = 50 ; m = 10 ; g = 9.8 (tot en S.I.)*

Si substituïm les variables pels valors establerts obtenim:

$$H(s) = 1 / [(15 / 0.5) + 10 * 0.5)s^2 + (50 / 0.5)s + (1000 / 0.5)]$$

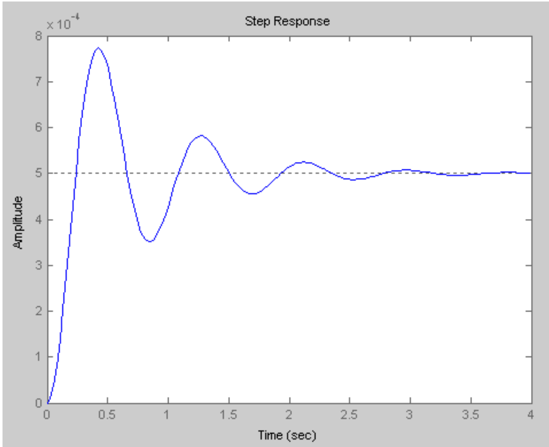
$$H(s) = 1 / (35s^2 + 100s + 2000)$$

*2.1. Fes que T(t) sigui un esglaó i comprova que les definicions dels sentits de les forces, parells de forces i x(t) estan d'acord amb el que surt a la simulació, és a dir, si el parell T és positiu cal obtenir que x(t) varia de la forma que la massa **m** puja i que si el parell és negatiu baixa.*

A Matlab, introduïm en el Command Window:

```
var_1 = 1;
var_2 = [35 100 2000];
step(var_1,var_2);
```

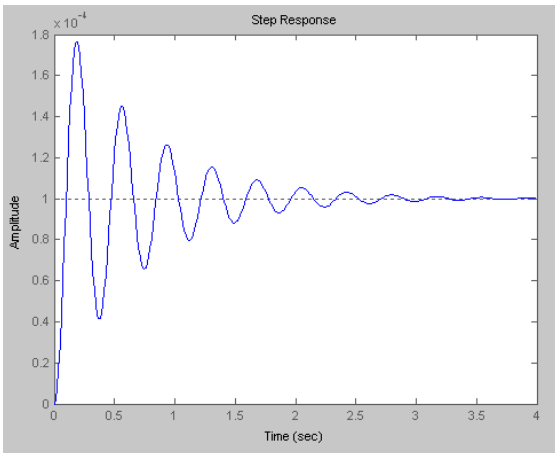
Efectivament es comprova que la simulació és correcta. Inicia un moviment ascendent i posteriorment descendent que minva considerablement amb el transcurs del temps fins estabilitzar-se en la posició vertical de l'esglaó degut a la contraposició de forces.



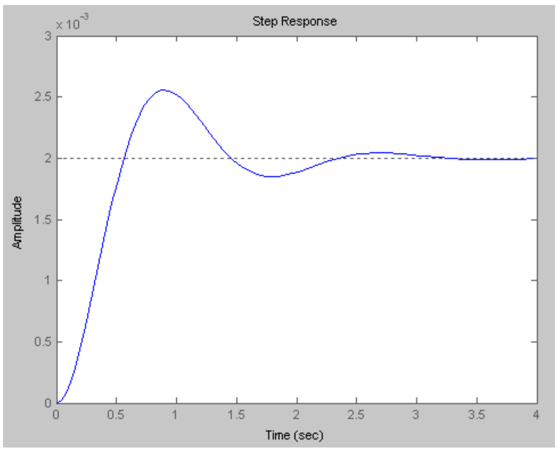
2.2. Les variacions de k i de m permeten provocar oscil·lacions més o menys àmplies? Què passa si k = 0?

Les oscil·lacions detectades en variar els paràmetres K i m són considerables, tal i com es pot apreciar en els següents exemples:

Cas 1: *K = 5000* => var_2 = [35 100 10000]

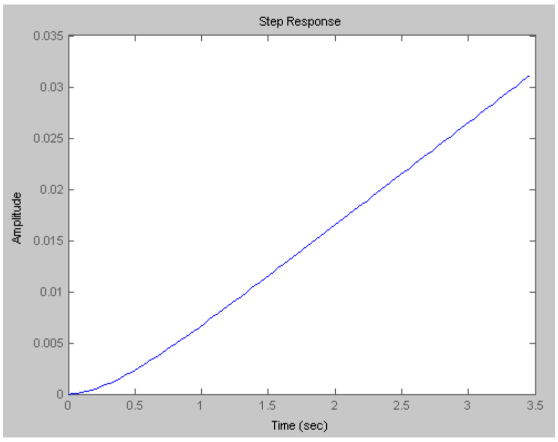


Cas 2: K = 250 => var_2 = [35 100 500]



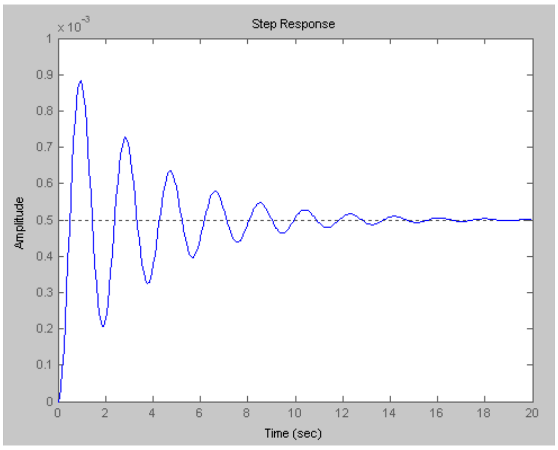
Cas 3: K = 0 => var_2 = [35 100 0]

Veiem que en el cas de K = 0, en no haver una força de tensió en la corda que retingui l'impuls inicial, aquest no és contrarestat i no es produeix el moviment oscil·lant fruit d'aquesta compensació de forces.

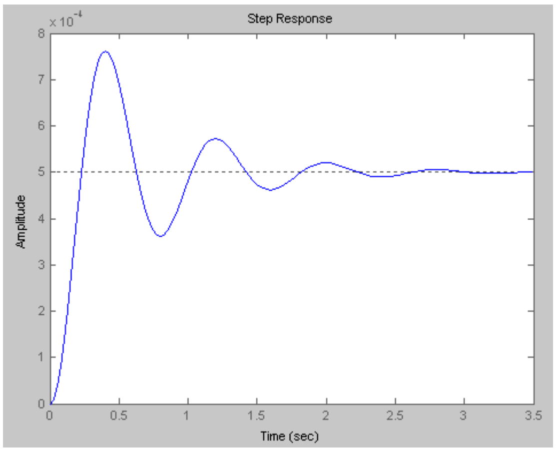


Cas 4: m = 300 => var_2 = [180 100 2000]

En la modificació dels valors de m, observem oscil·lacions majors o menors i més o menys nombroses pel fet de augmentar o disminuir la massa, ja que amb massa major, es trigarà més a tornar a l'estat d'equilibri.



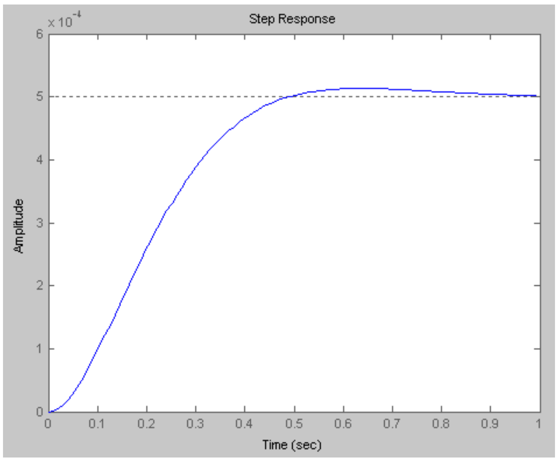
Cas 5: m = 2 => var_2 = [31 100 2000]



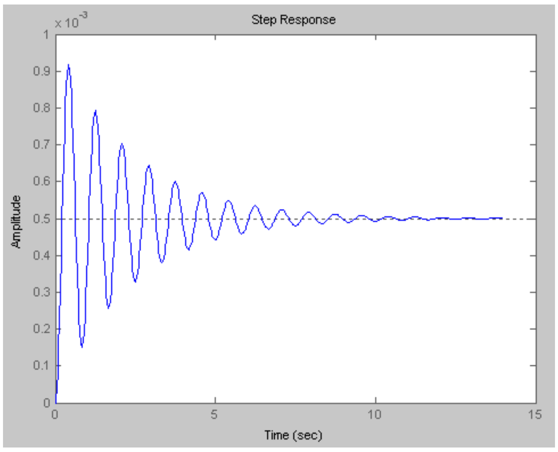
2.3.Investiga el paper que juga el factor f provocant diferents valors (provoca també f = 0).

S'ha observat que la modificació del paràmetre f afecta directament al nombre de oscil·lacions que es poden produir, sent aquestes indefinides en el cas de f = 0 ja que aleshores la força del fre del disc es inexistent. En augmentar f el nombre de oscil·lacions disminueix, i a mida que minva f, s'incrementa el nombre de oscil·lacions.

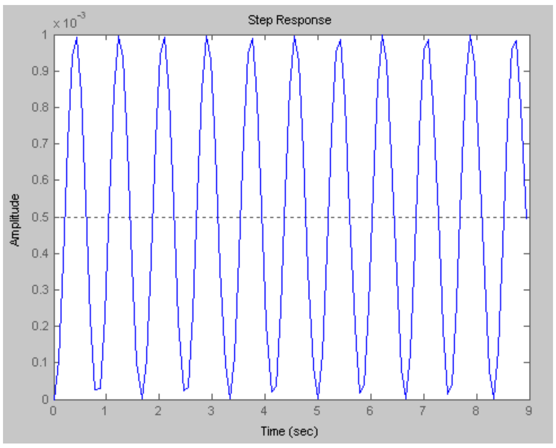
<u>Cas 6:</u> f = 200 => var_2 = [35 400 2000]



<u>Cas 7:</u> f = 15 => var_2 = [35 30 2000]



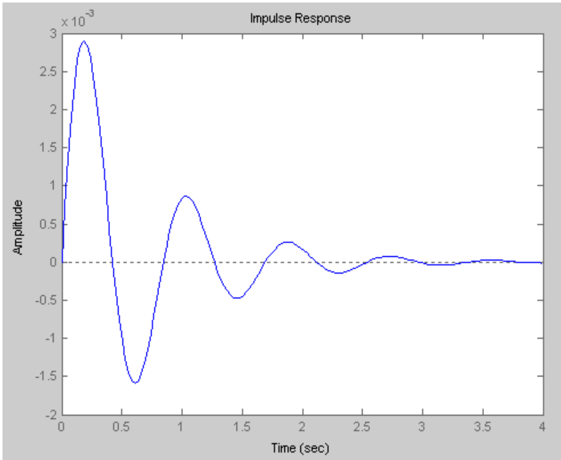
<u>Cas 8:</u> f = 0 => var_2 = [35 0 2000]



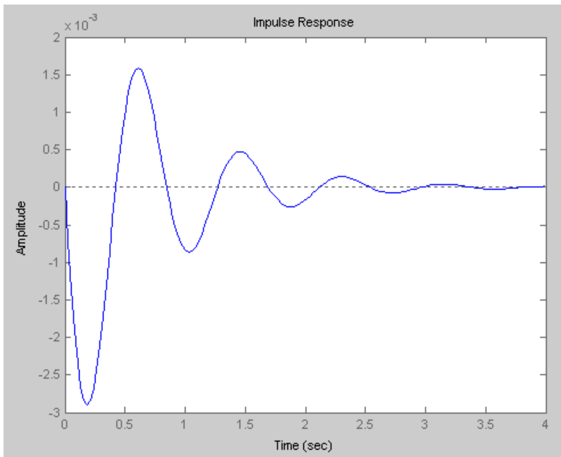
2.4. Fes que T(t) sigui un impuls i explica què passa.

impulse(var_1,var_2);

Comprovem que en realitzar un impuls, la situació és diferent respecte al resultat obtingut en step. En l'impuls s'ha produït una variació de les condicions inicials, i, donat que anteriorment aquestes eren nul·les i ara no (perquè s'aplica inicialment una força que impulsa la massa) s'obté com a resultat una força ascendent com a condició inicial, la qual fa que es produeixin oscil·lacions verticals que minven progressivament fins tornar a l'estat de repòs.



El motiu pel qual l'impuls és inicialment positiu (és a dir que la primera oscil·lació és ascendent) és el valor de la variable var_1 (el numerador) que té el valor '1' (positiu). Si invertim el valor de la variable a '-1' (negatiu), obtenim les oscil·lacions invertides, començant amb una descendent:



De fet, això és extrapolable a les gràfiques amb 'step', on en tenir el numerador negatiu es produeix un esglaó descendent, enlloc de l'esglaó ascendent dels exemples anteriors.