

Taula de continguts

Enunciat.....	2
Definir un sistema.....	3
Resposta temporal.....	4
Resposta Temporal Impuls (1).....	4
Resposta Temporal Step (1/s).....	5
Resposta Temporal Rampa (1/s ²).....	6
Resposta freqüencial.....	7
Característiques.....	7
Mapa de pols i zeros.....	8
Llaç tancat.....	9
Criteri d'estabilitat de Routh.....	9
Nous pols del sistema.....	9
Precisió en l'estat estacionari.....	10
Característiques de 2 casos concrets.....	10
Conclusions.....	14

Enunciat

- 1) Definir un sistema amb una planta de primer o segon ordre.
- 2) Estudiar el sistema:
 1. Resposta temporal (impulse, step...)
 2. Resposta freqüencial (bode)
 3. Característiques del sistema
 4. Mapa de pols i zeros
- 3) Canviar les característiques del sistema construint un llaç tancat (si la planta era de segon ordre, $D(s)$ o $H(s)$ ha de ser una constant i l'altre no existir)
 1. Criteri d'estabilitat (Routh)
 2. Nous pols i zeros del sistema
 3. Noves característiques
- 4) Conclusions

Definir un sistema

Com a planta hem escollit: $H(s) = 2 / (s^2 + 2s + 9) = k * (w_n^2 / (s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2))$

Normalitzem i trobem la freqüència natural i el coheficient d'esmoreïment:

$$H(s) = 2 / (s^2 + 2s + 9) = k * (w_n^2 / (s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2))$$

Normalitzem afegint $k = 2/9$

$$w_n^2 = 9$$

$$w_n = 3$$

$$2\zeta w_n = 2$$

$$\zeta = 1/3 < 1$$

Pols:

$$s_{1,2} = -\zeta w_n \pm j w_n (1 - \zeta^2)^{1/2}$$

$$s_{1,2} = -1 \pm j 2.828$$

Resposta temporal

Resposta Temporal Impuls (1)

$$Y(s) = 9 / (s^2 + 2s + 9) = K / (s + 1 - j 2.828) + K^* / (s + 1 + j 2.828)$$

$$K = (s + 1 - j 2.828) 9 / (s^2 + 2s + 9) = 9 / (s + 1 + j 2.828) = 9 / (-1 + j 2.828 + 1 + j 2.828) = 9 / (j 5.656) * -j 5.656 / -j 5.656 = -j 50.9 / 31.99 = -j 1.59$$

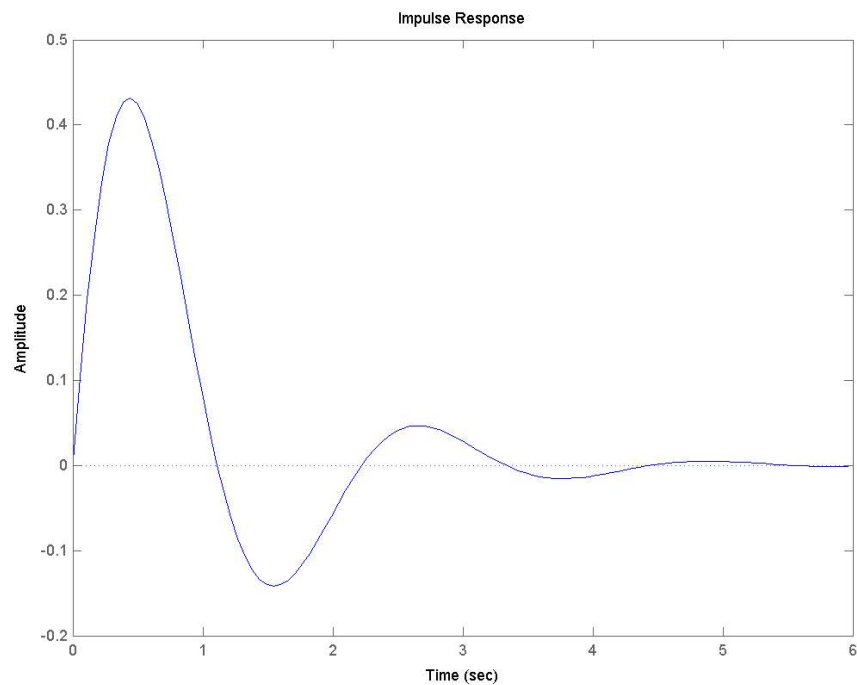
$$|K| = 1.59$$

$$\angle K = 0 \text{ rad}$$

$$K^* = j 1.59$$

$$y(t) = 3.18 e^{-t} \cos(2.828 t)$$

* Falta multiplicar per 2/9



Resposta Temporal Step (1/s)

$$Y(s) = 1/s * 9/(s^2 + 2s + 9) = A/s + K/(s + 1 - j 2.828) + K^*/(s + 1 + j 2.828)$$

$$s_0 = 0$$

$$s_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n (1 - \zeta^2)^{1/2}$$

$$A = s * 9/(s(s^2 + 2s + 9)) = 1$$

$$K = (s + 1 - j 2.828) * 9/(s(s^2 + 2s + 9)) = 9/(s(s + 1 + j 2.828)) = 9/(s^2 + s + s j 2.828) = 9/((-1 + j 2.828)^2 + (-1 + j 2.828) + (-j 2.828 - 7.99)) = 9/(1 - j 5.656 - 7.99 - 1 + j 2.828 - j 2.828 - 7.99) = 9/(-15.98 - j 5.656) * (-15.98 + j 5.656)/(-15.98 + j 5.656) = (-143.82 + j 50.9)/287.35 = -0.5 + j 0.177$$

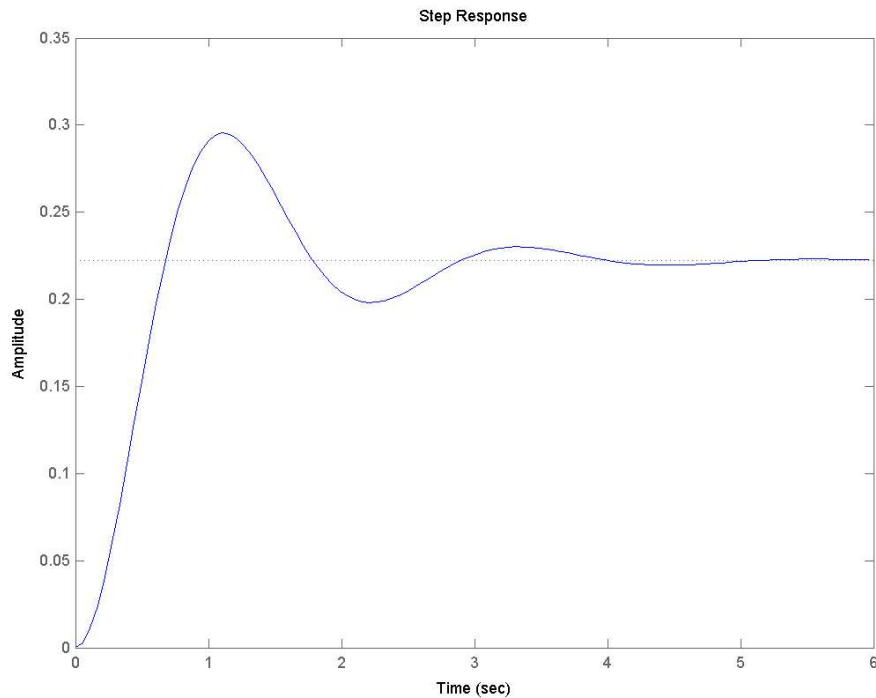
$$|K| = 0.53$$

$$\angle K = \arctg(0.177/-0.5) = \pi - \arctg(0.177/0.5) = 2.8 \text{ rad}$$

$$K^* = -0.5 - j 0.177$$

$$y(t) = u(t) + 1.06 e^{-t} \cos(2.8282 t + 2.8 \text{ rad})$$

* Falta multiplicar per 2/9



Resposta Temporal Rampa (1/s²)

$$Y(s) = 1 / s^2 * 9 / (s^2 + 2s + 9) = b_1 / s + b_2 / s + K / (s + 1 - j 2.828) + K^* / (s + 1 + j 2.828)$$

$$s_{0,1} = 0$$

$$s_{2,3} = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n (1 - \zeta)^{1/2}$$

$$b_2 = 1 / (2 - 2)! [d^0/ds (s^2 * 9 / (s^2 (s^2 + 2s + 9)))] = 9 / (s^2 + 2s + 9) = 1$$

$$b_1 = 1 / (2 - 1)! [d^1/ds (s^2 * 9 / (s^2 (s^2 + 2s + 9)))] = (9 (-2s - 2)) / ((s^2 + 2s + 9))^2 = (9 (-2)) / 9^2 = -0.2222222222$$

$$K = (s + 1 - j 2.828) * 9 / (s^2 (s^2 + 2s + 9)) = 9 / (s^2 (s + 1 + j 2.828)) = 9 / ((1 - j 5.656 - 7.09) * (-1 + j 2.828 + 1 + j 2.828)) = 9 / ((1 - j 5.656 - 7.09) * j 5.656) = 9 / (-33.879 + j 5.656) * (-33.879 - j 5.656) / (-33.879 - j 5.656) = (-304.9 - j 50.904) / (1147.78 + 31.99) = -0.25 - j 0.043$$

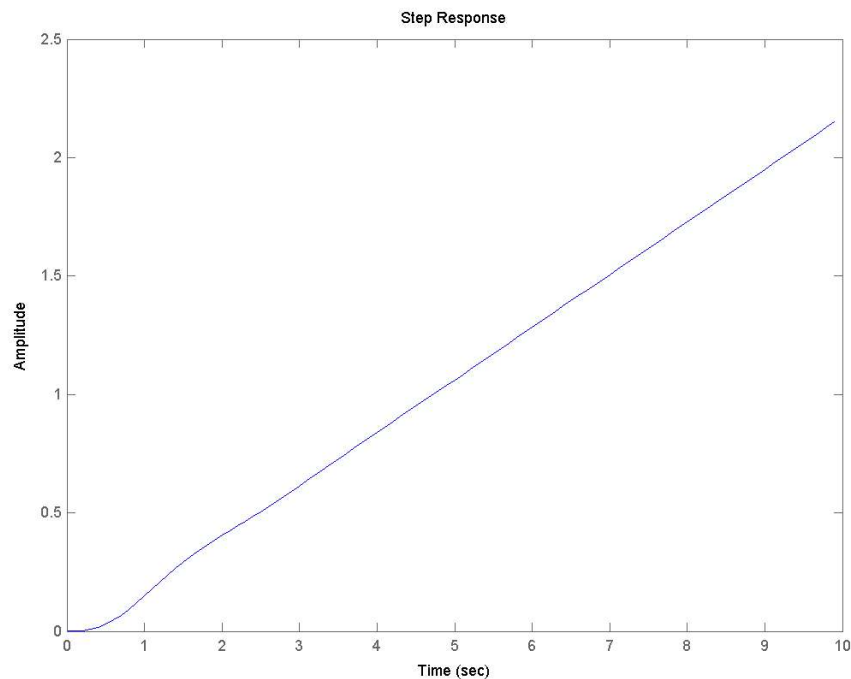
$$|K| = 0.25$$

$$\angle K = \arctg(-0.043/-0.25) = 0.17 \text{ rad}$$

$$K^* = -0.25 + j 0.043$$

$$y(t) = u(t) + 0.222222 t + 0.5 e^{-t} \cos(2.828 t + 0.17 \text{ rad})$$

* Falta multiplicar per 2/9



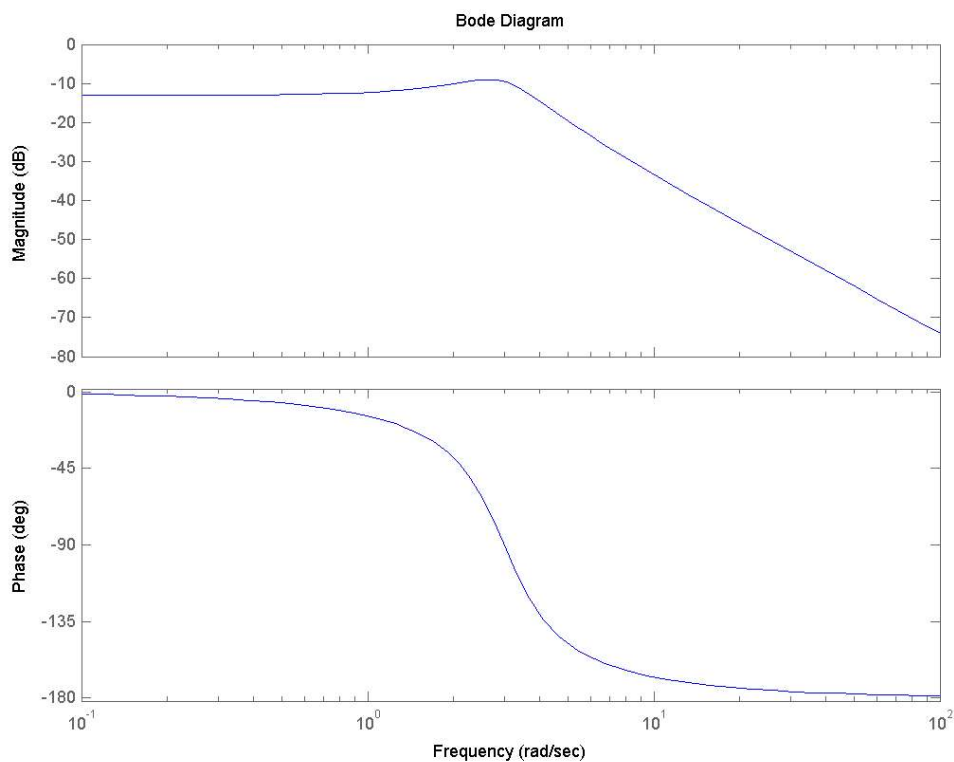
Resposta freqüencial

$$|H(j\omega)| = |9 / (-\omega^2 + 2j\omega + 9)| = 9 / ((9 - \omega^2)^2 + (2\omega)^2)^{1/2}$$

$$\angle H(j\omega) = \angle(9) - \angle(9 - \omega^2 + 2j\omega) = -\arctg(2\omega/(9 - \omega^2))$$

Bode

$$20 \log |H(j\omega)| = 20 \log 9 - 20 \log (((9 - \omega^2)^2 + (2\omega)^2)^{1/2})$$



Característiques

Recordem la freqüència natural i el coeficient d'esmoreïment:

$$\omega_n = 3$$

$$\zeta = 1/3$$

Freqüència forçada:

$$\omega_d = \omega_n(1 - \zeta^2)^{1/2} = 2.828$$

Temps de pic:

$$T_p = \pi / \omega_d = 1.11$$

Valor del Pic (esglaió): * *Multiplicar per 2/9 per recuperar la K inicial*

$$M_{pt} = y(T_p) = 1.3288 * 2/9 = 0.295$$

Temps d'establiment:

$$T_s = 4T = 4 / \zeta \omega_n = 4$$

Sobreimpuls (step):

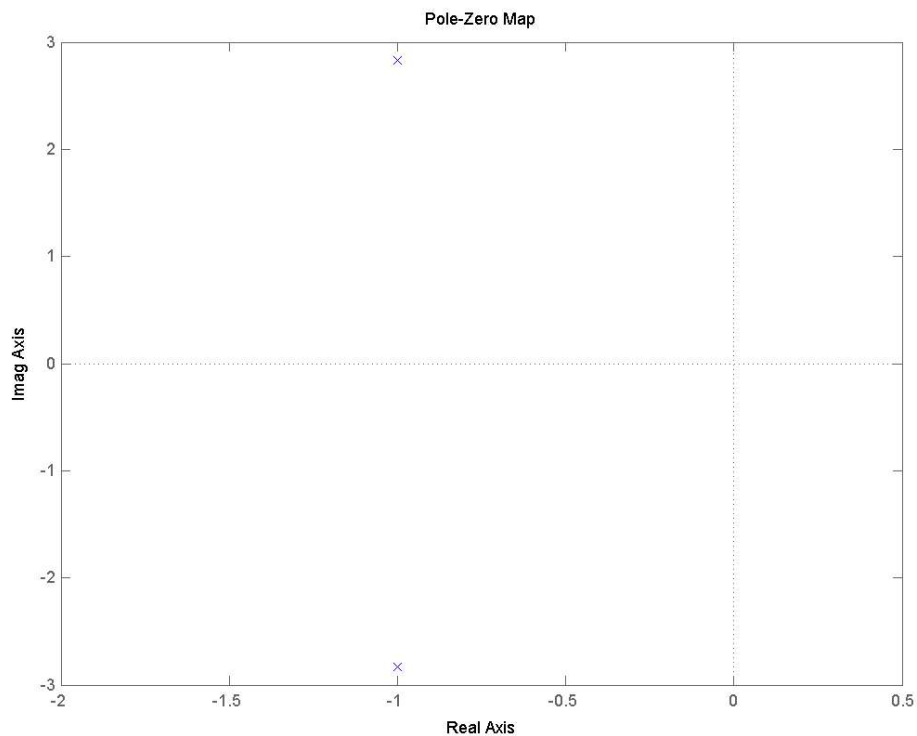
$$Y_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s * 1/s * 9 / (s^2 + 2s + 9) = 1 * \textit{Falta multiplicar per 2/9}$$

Sobrepic (step)

$$S.P. = 0.3365 - 1 / 1 = 0.3365 * 100 = 33.65 \%$$

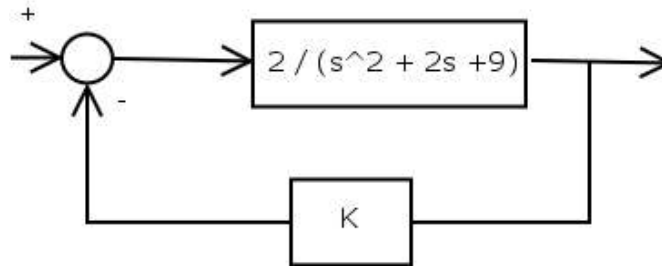
Mapa de pols i zeros

$$s_{1,2} = -1 \pm j 2.828$$



Llaç tancat

Redefinim el sistema de la següent forma:



$$A(s) = (2 / (s^2 + 2s + 9)) / (1 + (2K / (s^2 + 2s + 9))) = 2 / (s^2 + 2s + 9 + 2K) = 2/(9 + 2K) * (9 + 2K) / (s^2 + 2s + 9 + 2K)$$

Criteri d'estabilitat de Routh

$$Q(s) = s^2 + 2s + 9 + 2K$$

s^2	1	> 0
s^1	2	> 0
s^0	$9 + 2K$	$> 0 \Rightarrow K > -9/2 \Rightarrow$ Estable (Tots els Pols a la part real negativa)
		$< 0 \Rightarrow K < -9/2 \Rightarrow$ Inestable (1 Pol a la part real positiva)

K ha de ser superior a -9/2 per mantenir el sistema estable.

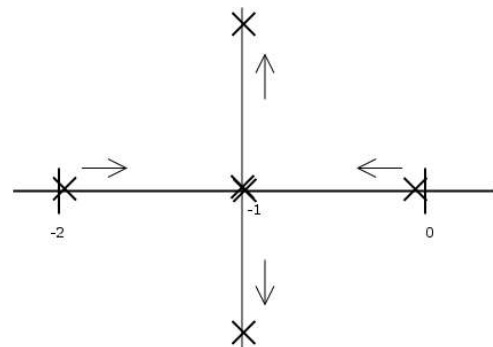
Nous pols del sistema

Pols:

$$s_{1,2} = (-2 \pm \sqrt{4 - 36 - 8K}) / 2 = -1 \pm \sqrt{-32 - 8K} / 2$$

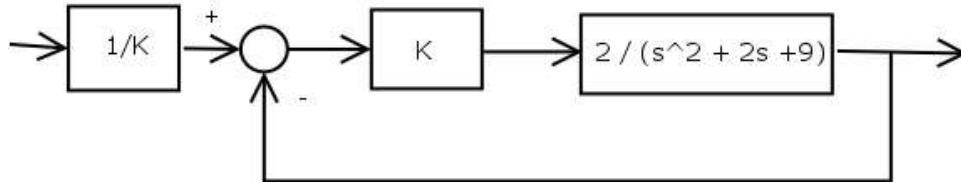
Tipus de pols segons valor de K:

- $32 - 8K > 0 \Rightarrow K < 32/-8 \Rightarrow K < -4 \Rightarrow$ Pols reals negatius
- $32 - 8K = 0 \Rightarrow K = 32/-8 \Rightarrow K = -4 \Rightarrow$ Pol doble real negatiu
- $32 - 8K < 0 \Rightarrow K > 32/-8 \Rightarrow K > -4 \Rightarrow$ Pol complex conjugat



Precisió en l'estat estacionari

Fem que $H(s)$ sigui 1 modificant el sistema sense alterar el resultat:



El sistema és de tipus 0 (té 0 pols a l'origen).

e_{ss} per a un esglaó:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} (2K) / (s^2 + 2s + 9) = (2K)/9$$

$$e_{ss} = 1 / (1 + K_p) = 1 / (1 + (2K)/9)$$

e_{ss} per a una rampa o per acceleració: Infinit

Característiques de 2 casos concrets

$$K = -4.2$$

$$A(s) = 2/0.6 * 0.6 / (s^2 + 2s + 0.6)$$

Pols

$$s_1 = -0.368$$

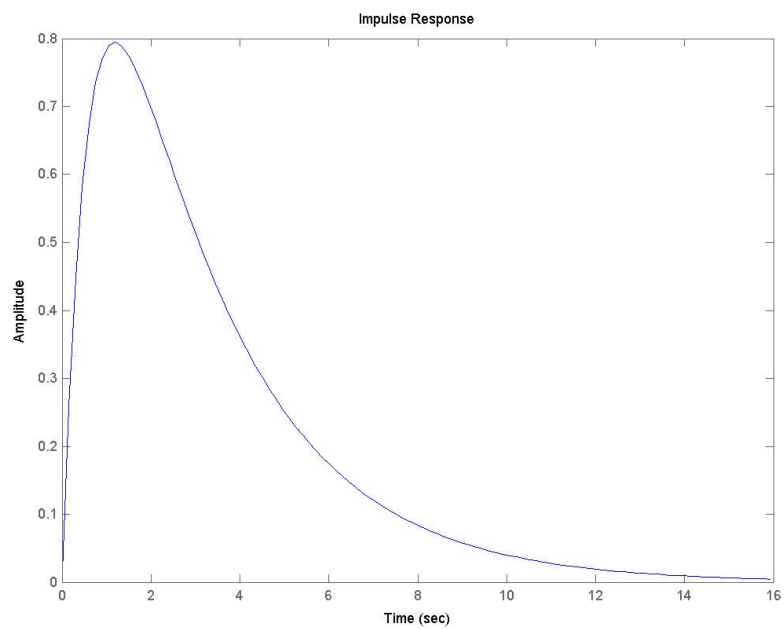
$$s_2 = -1.632$$

Freqüència natural i coeficient d'esmoreïment:

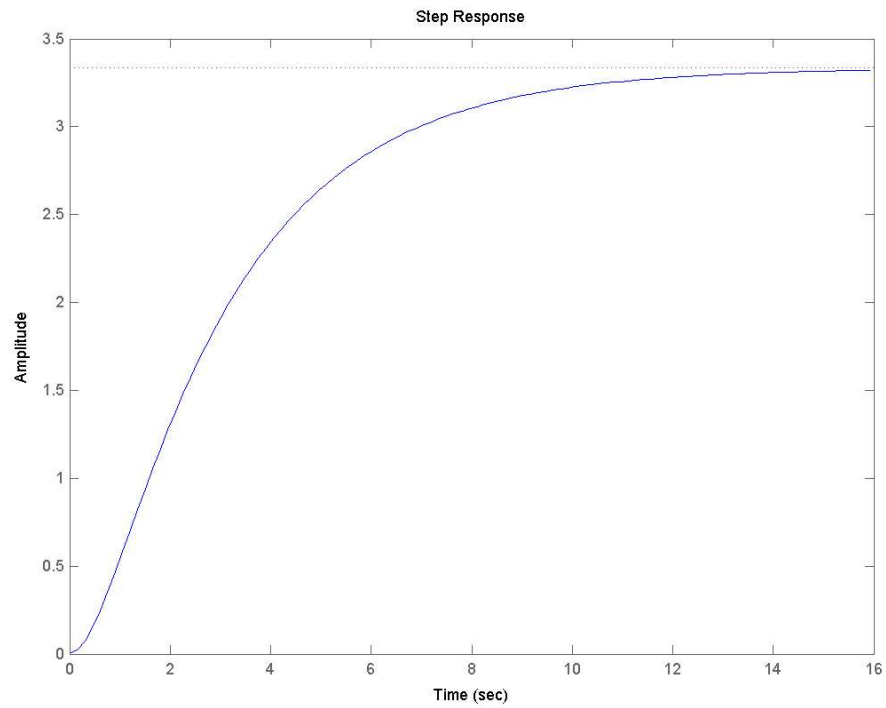
$$\omega_n = 0.774$$

$$\zeta = 1.291$$

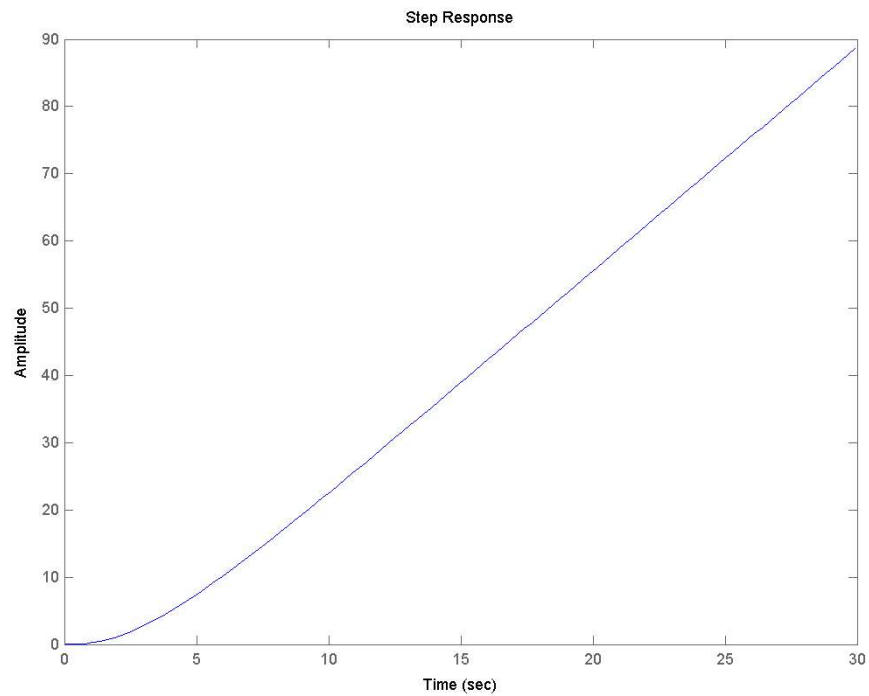
1) Resposta per un impuls



2) Resposta per un esglao



3) Resposta per una rampa



K = 10

$$A(s) = 2/29 * 29 / (s^2 + 2s + 29)$$

Pols

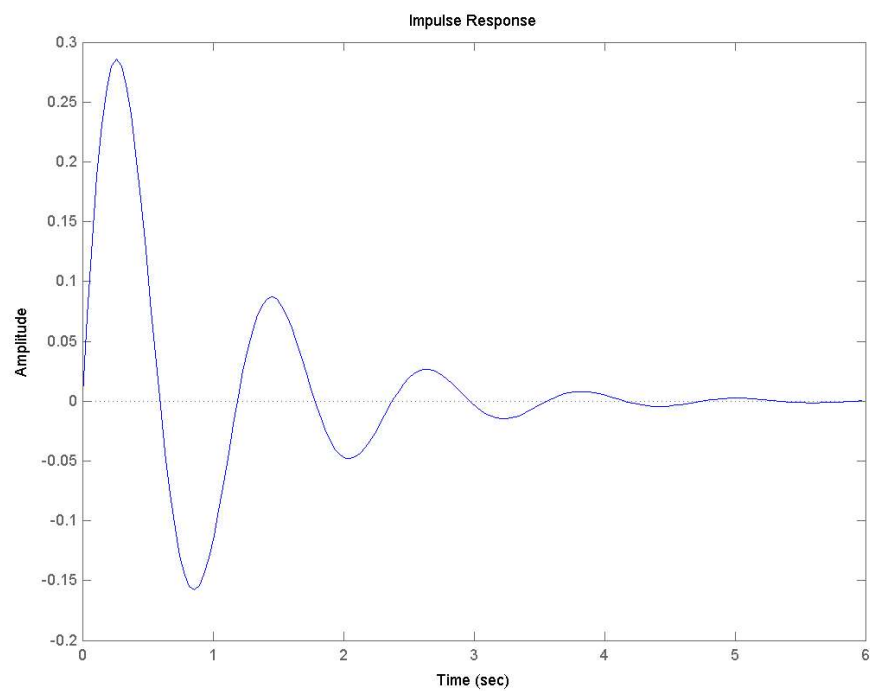
$$s_{1,2} = -1 \pm j 10.583$$

Frequència natural i coeficient d'esmoreïment:

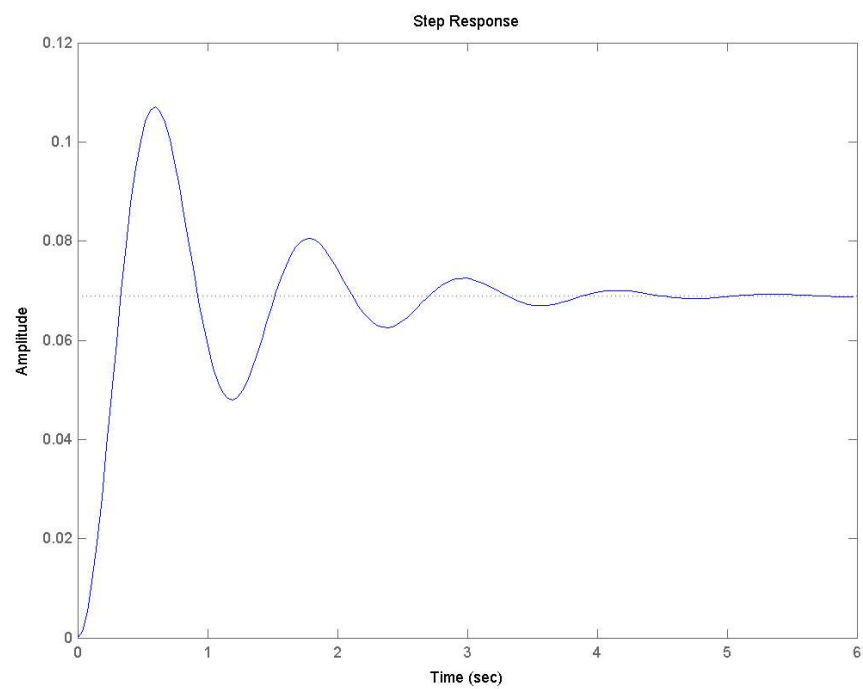
$$\omega_n = 5.38$$

$$\zeta = 0.185$$

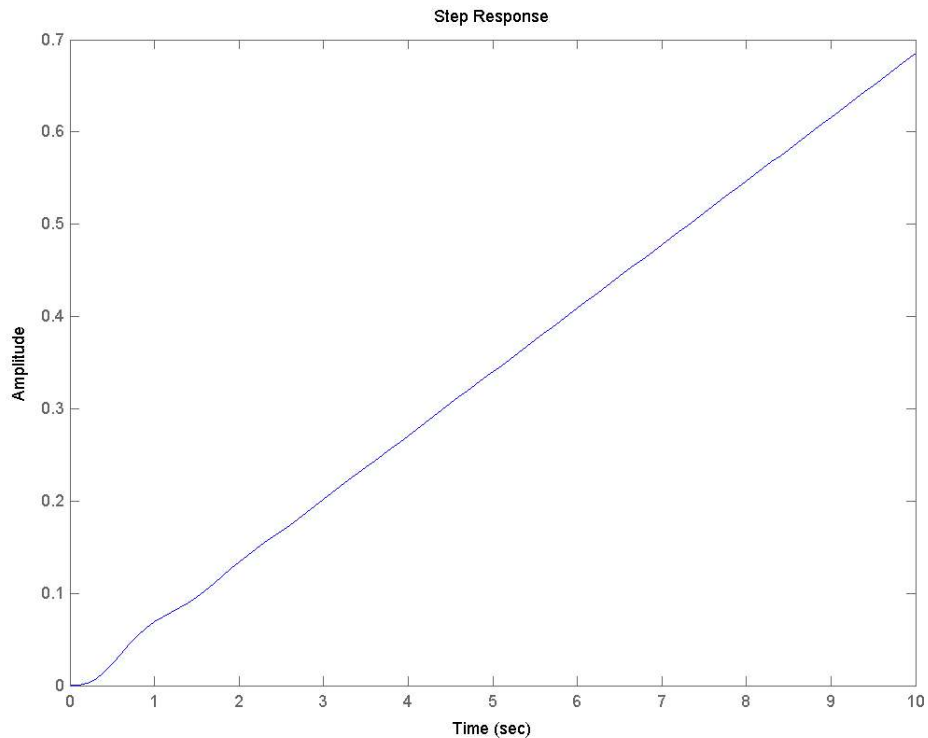
1) Risposta per un impuls



2) Risposta per un step



3) Resposta per una rampa



Conclusions

Després de realitzar els càlculs sobre el sistema de llaç obert i el sistema de llaç tancat junt amb l'ajuda de les gràfiques, es evident que el llaç amb el component K ens permet variar les característiques del sistema per adaptar-lo a les nostres necessitats.

Es pot observar que per una K molt gran el coeficient d'esmoreïment disminueix i per tant es podrien veure més oscil·lacions. En canvi per K petites (però superiors a -4.5 ja que sinó el sistema es tornaria inestable) el coeficient d'esmoreïment s'incrementa i per tant es redueixen les oscil·lacions.

L'error a l'estat estacionari (amb entrada esglaó) també es veu afectat per K , si K és molt gran llavors l'error es més petit però si K es molt petit llavors s'incrementa l'error.